# הרצאה מספר 30
# אלגברה 1 מ 104016

## הנושא: דטרמיננטים
## הדטרמיננטה מסדר $n$

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.7 תת־מטריצה ריבועית ומינור

- בהמשך נניח ש־ $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$.
- נסמן ב־ $A(i|j)$ את המטריצה שמתקבלת מ־ $A$ על ידי מחיקת שורה $i$ ועמודה $j$.
  תת־מטריצה ריבועית מסדר $n-1$
- נסמן ב־ $A(i_1,i_2|j_1,j_2)$ את המטריצה שמתקבלת מ־ $A$ על ידי מחיקת שורות $i_1$ ו־ $i_2$ ועמודות $j_1$ ו־ $j_2$.
  תת־מטריצה ריבועית מסדר $n-2$
- נסמן $M_{ij}(A)=\det(A(i|j))$
  מינור מסדר $n-1$
- באופן דומה יש מינור מסדר $k$: דטרמיננטה של תת־מטריצה ריבועית מסדר $k$.
- המשלים האלגברי של $a_{ij}$ הוא $(-1)^{i+j}M_{ij}(A)$


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.7 תת־מטריצה ריבועית ומינור

- $A(i|j)$ המטריצה שמתקבלת מ־ $A$ על ידי מחיקת שורה $i$ ועמודה $j$.
- $M_{ij}(A) = \det(A(i|j))$

---

- **דוגמה:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A(3|2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad A(2|1) = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{2,1}(A) = \det(A(2|1)) = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}$$

$$M_{3,2}(A) = \det(A(3|2)) = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$$

$$A(2,3|1,2) = \begin{pmatrix} a_{13} \end{pmatrix}$$


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.8 הגדרת הדטרמיננטה מסדר $n$

- <u>הגדרה:</u> יהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n > 1$.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}(A)$$

הסכום נקרא פיתוח הדטרמיננטה לפי השורה הראשונה.

לסדר 1 ההגדרה היא: $\det(\ (a_{11})\ ) = a_{11}$.

- המקרה $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11}(A) + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12}(A)$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

זה נותן אותו ביטוי מוכר למקרה $2 \times 2$.


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.9 דטרמיננטה מסדר 3

- המקרה $n = 3$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & (-1)^{1+1} a_{11} M_{11}(A) \\ & + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12}(A) \\ & + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13}(A) \end{aligned}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}(A)$$

$$= \begin{aligned} & (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \det(A) = \; & a_{11} \; (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ - \; & a_{12} \; (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ + \; & a_{13} \; (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}}$$


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.9 דטרמיננטה מסדר 3

- המקרה $n = 3$:

$$\begin{aligned}\det(A) &= & a_{11} & (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ & - & a_{12} & (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ & + & a_{13} & (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= + & a_{11}a_{22}a_{33} & - & a_{11}a_{23}a_{32} \\ & - & a_{12}a_{21}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} \\ & + & a_{13}a_{21}a_{32} & - & a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

- יש כאן $3! = 6$ מחוברים.
- חצי המחוברים באים בסימן חיובי,
  וחצי המחוברים באים בסימן שלילי.
- כל מחובר הוא מכפילה של אברים של אלכסון מוכלל (איבר אחד מכל שורה מעמודות שונות): $\pm a_{1,j_1}a_{2,j_2}a_{3,j_3}$.

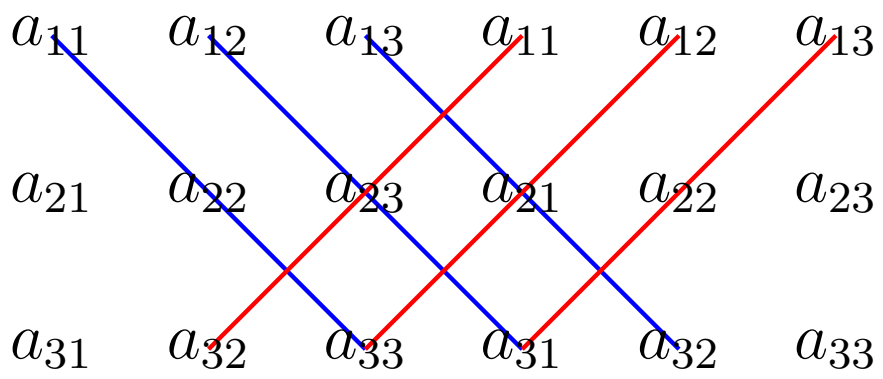

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.9 דטרמיננטה מסדר 3

- המקרה $n = 3$:

$$\begin{aligned}\det(A) = &+ a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\\ &- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}\\ &+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

- הסבר ציורי של המחוברים (רק ל־ $n = 3$):





©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.10 דטרמיננטה מסדר $n$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}(A)$$

$$= \sum_{\sigma}\left(\operatorname{sign}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}\right)$$

---

- יש $n!$ מחוברים.
- חצי המחוברים באים בסימן חיובי,
  וחצי המחוברים באים בסימן שלילי.
- כל מחובר הוא מכפילה של אברים של אלכסון מוכלל (איבר אחד מכל שורה מעמודות שונות): $\pm a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n}$.
- השיטה לחשב את הסימן השייך לכל אלכסון מוכלל אינו בחומר של הקורס.


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.11 פיתוח לפי שורה או עמודה

- <u>משפט לפלס (פיתוח לפי שורה $i$):</u>

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A)$$

- <u>משפט לפלס (פיתוח לפי עמודה $j$):</u>

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A)$$

- נוכיח את נכונות הפיתוח לפי עמודה $j = 1$ בהמשך.
- שאר המקרים דומים באופי ההוכחה.


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# $\det(A^t) = \det(A)$ 7.12

- **משפט:** $\det(A^t) = \det(A)$
- **הוכחה:**
  - נוכיח באינדוקציה על $n$.
  - מקרה הבסיס הוא $n = 1$ שבו $A^t = A$ ולכן הטענה נכונה.
  - נשים לב שמהנחת האינדוקציה נובע כי $M_{j1}(A^t) = M_{1j}(A)$:

$$\begin{aligned} M_{j1}(A^t) &= \det\left(A^t(j|1)\right) = \det\left((A(1|j))^t\right) \\ &= \det\left(A(1|j)\right) = M_{1j}(A) \end{aligned}$$

  - נתחיל את החישוב עם פיתוח לפי עמודה ראשונה:

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} (A^t)_{j1} M_{j1}(A^t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}(A) = \det(A) \end{aligned}$$

$\square$


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.13 ליניאריות בכל שורה

- **משפט:**
  - יהיו $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b} \in F^n$.
    תהי $A$ המטריצה הריבועית מסדר $n$ ששורותיה הן $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ (לפי סדר).
    תהי $B_k$ המטריצה הריבועית מסדר $n$ שמתקבל מ־ $A$ על ידי החלפת שורה $k$ בוקטור $\vec{b}$.
    תהי $C_k$ המטריצה הריבועית מסדר $n$ שמתקבל מ־ $A$ על ידי חיבור $\vec{b}$ לשורה $k$.

**אזי:** $\det(C_k) = \det(A) + \det(B_k)$.

---

- **הוכחה:** באינדוקציה על $n$. המקרה $n = 1$ מיידית מההגדרה:
  $\det((a+b)) = a + b = \det((a)) + \det((b))$.


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.13 ליניאריות בכל שורה

- <u>משפט:</u> יהיו $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n,\vec{b}\in F^n$. יהיו: $A=(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)$,
$B_k=(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{k-1},\vec{b},\vec{a}_{k+1},\ldots,\vec{a}_n)$ , $C_k=(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{k-1},\vec{a}_k+\vec{b},\vec{a}_{k+1},\ldots,\vec{a}_n)$
**אזי:** $\det(C_k)=\det(A)+\det(B_k)$.

---

- נטפל קודם במקרה $\underline{k=1}$:
  - מתקיים: $(C)_{1j}=a_{1j}+(B)_{1j}$ לפי ההגדרות של המטריצות.
  - ההבדל הוא בשורה 1 בלבד. לכן: $M_{1j}(C)=M_{1j}(B)=M_{1j}(A)$.

$$\begin{aligned}
\det(C_k) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}(C)_{1j}M_{1j}(C)\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}(a_{1j}+(B)_{1j})M_{1j}(C)\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}(A)+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}(B)_{1j}M_{1j}(B)\\
&= \det(A)+\det(B)
\end{aligned}$$


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.13 לינאריות בכל שורה

- <u>משפט:</u> יהיו $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n,\vec{b}\in F^n$. יהיו: $A=(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)$,
$B_k=(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{k-1},\vec{b},\vec{a}_{k+1},\ldots,\vec{a}_n)$ , $C_k=(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{k-1},\vec{a}_k+\vec{b},\vec{a}_{k+1},\ldots,\vec{a}_n)$
אזי: $\det(C_k)=\det(A)+\det(B_k)$.

---

- נטפל עכשיו במקרה $\underline{k>1}$: גישה אחרת: למחוק את השורה שבו הסכום.
  - מתקיים: $(C)_{1j}=a_{1j}=(B)_{1j}$ לפי ההגדרות של המטריצות.
  - ההבדל הוא בשורה $k$ שלא נמחק בפיתוח לפי שורה ראשונה. אבל לפי הנחת האינקוציה: $M_{1j}(C)=M_{1j}(A)+M_{1j}(B)$.

$$\begin{aligned}
\det(C_k) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}(C)_{1j}M_{1j}(C)\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}(M_{1j}(A)+M_{1j}(B))\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}(A)+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}(B)_{1j}M_{1j}(B)\\
&= \det(A)+\det(B_k) \qquad \square
\end{aligned}$$


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.13 לינאריות בכל שורה

- **משפט:**
  - יהיו $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in F^n$.
    תהי $A$ המטריצה הריבועית מסדר $n$ ששורותיה הן $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ (לפי סדר).
    תהי $B_k$ המטריצה הריבועית מסדר $n$ שמתקבל מ־ $A$ על ידי הכפלת שורה $k$ בסקלר $\alpha$.

**אזי:** $\det(B) = \alpha \det(A)$.

---

- ההוכחה דומה להוכחת המשפט הקודם.

---

- **מסקנה:** $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

**הוכחה:** יש להוציא את הגורם הכפלי $\alpha$ מכל אחת מהשורות.

- **מסקנה:** אם ל־ $A$ יש שורת אפסים, אזי $\det(A) = 0$.

**הוכחה:** הכפלת שורת האפסים ב־ $0$ אינו משנה את המטריצה, אך מאפס את הדטרמיננטה.


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.14 דטרמיננטה של מטריצה משולשת

- <u>משפט:</u> יהי $A$ מטריצה משולשת תחתונה.
אזי $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$ (מכפילת אברי האלכסון).
- <u>הוכחה:</u> באינדוקציה על $n$. בסיס האינדוקציה $n = 1$ וברור.
בפיתוח לפי שורה הראשונה, $a_{1j} = 0$ לכל $j > 1$ כי $A$ משולשת תחתונה.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}(A) = a_{11} M_{11}(A)$$

גם תת המטריצה $A(1|1)$ משולשת תחתונה, ולכן לפי הנחת האינדוקציה: $M_{11}(A) = a_{22} \cdots a_{nn}$. $\square$

- <u>מסקנה:</u> $\det(I) = 1$.
- <u>מסקנה:</u> יהי $A$ מטריצה משולשת עליונה.
אזי $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$ (מכפילת אברי האלכסון).


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.15 השפעת החלפת שורות על הדטרמיננטה

- <u>משפט:</u> תהי $A$ מטריצה ריבועית, ותהי $B$ מטריצה המתקבלת מ־ $A$ לאחר ביצוע הפעולה $R_k \leftrightarrow R_{k+1}$ **אזי** $\det(B) = -\det(A)$.
- <u>הוכחה:</u> באינדוקציה על $n$. בסיס האינדוקציה $n = 2$ שראינו בהרצאה קודמת.
  - מכיון ששורה $k$ של $B$ היא שורה $k+1$ של $A$ מתקיים: $(-1)^{k+1} b_{k,1} M_{k,1}(B) = -(-1)^{(k+1)+1} a_{k+1,1} M_{k+1,1}(A)$.
  - מכיון ששורה $k+1$ של $B$ היא שורה $k$ של $A$ מתקיים: $(-1)^{(k+1)+1} b_{k+1,1} M_{k+1,1}(B) = -(-1)^{k+1} a_{k,1} M_{k,1}(A)$.
  - לכל מספר $i \notin \{k, k+1\}$ שורה $i$ של $A$ ו־ $B$ שווה, ותתי־המטריצות שמתקבלות מ־ $A$ ו־ $B$ ע"י מחיקת שורה $i$ קשורות על ידי החלפת זוג שורות עוקבות. לכן, לפי הנחת האינדוקציה מתקיים: $(-1)^{i+1} b_{i,1} M_{i,1}(B) = -(-1)^{i+1} a_{i,1} M_{i,1}(A)$.


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.15 השפעת החלפת שורות על הדטרמיננטה

- <u>משפט:</u> תהי $A$ מטריצה ריבועית, ותהי $B$ מטריצה המתקבלת מ־ $A$ לאחר ביצוע הפעולה $R_k \leftrightarrow R_{k+1}$ (החלפת שורות עוקבות). אזי $\det(B) = -\det(A)$.
- $(-1)^{k+1} b_{k,1} M_{k,1}(B) = -(-1)^{(k+1)+1} a_{k+1,1} M_{k+1,1}(A)$.
- $(-1)^{(k+1)+1} b_{k+1,1} M_{k+1,1}(B) = -(-1)^{k+1} a_{k,1} M_{k,1}(A)$.
- $(-1)^{i+1} b_{i,1} M_{i,1}(B) = -(-1)^{i+1} a_{i,1} M_{i,1}(A)$.

---

- כעת נחשב את הדטרמיננטות לפי פיתוח של עמודה ראשונה:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} M_{i1}(B) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}(A) \\
&= -\det(A)
\end{aligned}$$

$\square$


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.15 השפעת החלפת שורות על הדטרמיננטה

- <u>משפט:</u> תהי $B$ המטריצה המתקבלת מ־ $A$ ע"י הפעולה $R_i \leftrightarrow R_j$.
  **אזי** $\det(B) = -\det(A)$. **נניח ש־** $i < j$.
- <u>הוכחה:</u> נראה איך לבצע את הפעולה בעזרת מספר **אי־זוגי** של החלפות שורות **עוקבות**. ואז המשפט נובע מהמשפט הקודם.
- ניתן להוריד את שורה $i$ לשורה $j$ על ידי הפעולות:
  - $R_i \leftrightarrow R_{i+1}$
  - $R_{i+1} \leftrightarrow R_{i+2}$
  - $\vdots$
  - $R_{j-1} \leftrightarrow R_j$
- לאחר פעולות אלו: שורה $i$ המקורית נמצאת בשורה $j$, אך שורות $i+1, \ldots, j$ כולן עלו שורה אחת.
- ניתן לסיים את תהליך ההחלפה כך:
  - $R_{j-1} \leftrightarrow R_{j-2}$
  - $R_{j-2} \leftrightarrow R_{j-3}$
  - $\vdots$
  - $R_{i+1} \leftrightarrow R_i$
- סה"כ מבצעים מספר **אי־זוגי** של החלפות שורות עוקבות.

$\square$


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.16 שורות תלויות והדטרמיננטה

- <u>משפט:</u> תהי $B$ המטריצה המתקבלת מ־ $A$ ע"י הפעולה $R_i \leftrightarrow R_j$.
  **אזי** $\det(B) = -\det(A)$.

---

- <u>משפט:</u> תהי $A$ מטריצה שבה שתי שורות (שונות) שוות.
  **אזי** $\det(A) = 0$.
- <u>הוכחה:</u> תהי $B$ המטריצה שמתקבלת מ־ $A$ על ידי החלפת השורות השוות.
  לפי המשפט הקודם: $\det(B) = -\det(A)$.
  אבל, $B = A$, ולכן $\det(B) = \det(A)$.
  שתי התוצאות האלו מחייבות ש־ $\det(A) = 0$. $\square$

---

- <u>מסקנה:</u> תהי $A$ מטריצה שבה שתי שורות (שונות) הן כפולות אחת של השניה. **אזי** $\det(A) = 0$.
- <u>הוכחה:</u> ניתן להוציא את הקבוע הכפלי החוצה, ולהפעיל את המשפט הקודם.


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.16 שורות תלויות והדטרמיננטה

- <u>מסקנה:</u> תהי $A$ מטריצה שבה יש שורת אפסים. **אזי** $\det(A) = 0$.
- <u>הוכחה:</u> מיידי עבור $n = 1$. ל־ $n > 2$ ניתן להתיחס אל שורות האפסים ככפולה של שורה אחרת ב־ $0$.

---

- <u>משפט:</u> יהיו $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b} \in F^n$. יהיו: $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$,
$B_k = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{b}, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n)$ , $C_k = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_k + \vec{b}, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n)$
**אזי:** $\det(C_k) = \det(A) + \det(B_k)$.

---

- <u>משפט:</u> תהי $C$ המטריצה המתקבלת מ־ $A$ ע"י הפעולה $R_k \to R_k + \alpha R_j$. $(j \neq k)$ **אזי** $\det(C) = \det(A)$.
- <u>הוכחה:</u> נפעיל את המשפט הקודם שמצוטט למעלה, כאשר $\vec{a}_i = A_{i.}$, ו־ $\vec{b} = \alpha A_{j.}$.

$$\det(C) = \det(A) + \det(B) = \det(A) + 0 = \det(A)$$

כי ב־ $B$ יש שתי שורות ת"ל. $\square$


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.16 שורות תלויות והדטרמיננטה

- <u>משפט:</u> תהי $C$ המטריצה המתקבלת מ־ $A$ ע"י הפעולה $R_k \to R_k + \alpha R_j$. $(j \neq k)$
  **אזי** $\det(C) = \det(A)$.

---

- <u>משפט:</u> תהי $A$ המטריצה שבה השורות ת"ל. **אזי** $\det(A) = 0$.
- <u>הוכחה:</u> אם ב־ $A$ יש שורת אפסים, התוצאה ידועה.
  לכן, קיים $k$ כך ששורה $k$ היא צ"ל של השורות הקודמות:

$$A_{k\cdot} = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i A_{i\cdot}.$$

אזי ביצוע סדרת הפעולות: $R_k \to R_k - \alpha_i R_i$ עבור $i = 1, 2, \ldots, k-1$ אינו משנה את הדטרמיננטה, ומאפסת את שורה $k$.
לכן $\det(A) = 0$.
$\square$


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

# 7.17 פעולות שורה/עמודה, שורות בתל

- <u>סיכום:</u> נניח שהמטריצה $B$ מתקבלת מ־ $A$ על ידי הפעלת פעולת שורה או עמודה אלמנטרית אחד.

1. אם הפעולה היא **החלפת** שתי שורות או שתי עמודות:

$$\det B = -\det A$$

2. אם הפעולה היא **הכפלת** שורה או עמודה בסקלר $\alpha$: $(\alpha \neq 0)$

$$\det B = \alpha \det A$$

3. אם הפעולה היא **חיבור** כפולה של שורה/עמודה לשורה/עמודה **אחרת**:

$$\det B = \det A$$

- <u>אבחנה:</u> ביצוע פעולות השורה/עמודה לא יכולים לשנות מטריצה בעלת דטרמיננטה **שונה מאפס** למטריצה בעלת דטרמיננטה **אפס**.


©נתן ולך, כל הזכויות שמורות